

Conférence annuelle de l'Association Française des Accordeurs-Restaurateurs de Pianos - EUROPIANO
26 avril 2008

Du calcul des cordes au plan de cordes

Jean Louchet

Jean.Louchet@gmail.com

1. Introduction

- des calculs *mais...* des formules!
- un livre
- un logiciel

2. La vibration d'une corde

2.1. La corde idéale: parfaitement souple

Le son est composé du fondamental et des harmoniques;
les harmoniques sont les multiples exacts du fondamental.

2.2. La corde réelle: raide.

Le son est composé du *fondamental* et des *partiels*

Les partiels ne sont pas exactement les multiples du fondamental, mais sont décalés vers le haut.

C'est la *raideur* qui décale les partiels vers le haut.

Plus la corde est raide, plus les partiels sont décalés.

Moins la corde est tendue (à raideur égale), plus les partiels sont décalés.

On dit que le son est *inharmonique*.

2.3. Quelles sont les caractéristiques importantes du matériau de la corde?

- la limite élastique
- la limite de rupture
- la densité (masse volumique)
- le module d'Young
- la viscosité

Dans le cas d'une corde métallique, on peut affirmer en première approximation que:

- La densité et le module d'Young dépendent seulement de la composition chimique du matériau;
- la limite élastique et la limite de rupture dépendent à la fois:
 - de la composition chimique
 - et des traitements (mécaniques et thermiques)

Exemples:

- si on étire une corde (écrouissage) → augmentation de la limite élastique
- si on recuit une corde → diminution de la limite élastique

mais ça ne changera ni la densité ni le module d'Young (ou très peu)

3. Les formules de base

Pour calculer la fréquence fondamentale ou la tension:

$$F = \frac{1}{\Delta L} \sqrt{\frac{T}{\pi \rho}}$$

$$T = \pi \rho \Delta^2 F^2 L^2.$$

T = tension

ρ = masse volumique (en kilogrammes par mètre cube) = “*density*”

Δ = diamètre

F = fréquence fondamentale

L = longueur vibrante

Exemple: prenons une corde en acier Rösiau (masse vol. = 7800), longueur 35 cm, diamètre 0,8 mm. Pour l’accorder au do de fréquence 523 Hertz il faudra une tension de:

$$T = 3,14 \times 7800 \times (0,8 \times 10^{-3})^2 \times 523^2 \times (0,35)^2$$

$$T = 3.14 \times 7800 \times 0.64 \times 10^{-6} \times 273500 \times 0,1225 = 525$$

Il faut donc une tension de 525 Newton soit environ 52 kgf.

2ème exemple: un piano ancien, longueur 1 m, *la* (note no. 25) fréquence 110Hz, je veux une tension de seulement 40 kg. La 1ère formule donnera pour une corde blanche en acier, un diamètre:

$$\Delta = \frac{1}{F L} \sqrt{\frac{T}{\pi \rho}} = \frac{1}{110 \times 1} \sqrt{\frac{400}{\pi \times 7800}} = 1,16 \text{ mm.}$$

4. L'inharmonicité

Formule simplifiée: le rapport entre le 2ème partiel (la réalité) et le 2ème harmonique (l'idéal) est:

$$f_2/2f_1 \approx 1 + 0,234 \frac{E \Delta^2}{\rho F^2 L^4}$$

E (le module d'Young) vaut typiquement: 3×10^{11} (acier), 2×10^{11} (fer), 10^{11} (laiton).

Les fiches de test des cordes donnent la valeur en Gigapascals (par exemple, $200 \text{ GPa} = 2.10^{11}$).

Reprenons nos 2 exemples (cordes acier):

Corde aiguë:

$$f_2/2f_1 = 1 + 0,234 \frac{3 \times 10^{11} \times (0,8 \times 10^{-3})^2}{7800 \times 523^2 \times 0,35^4} = 1 + \frac{0,234 \times 1,92 \times 10^5}{7800 \times 273000 \times 0,015} = 1,0015$$

Corde grave:

$$f_2/2f_1 = 1 + 0,234 \frac{E d^2}{\rho F^2 L^4} = 1 + \frac{0,234 \times 3 \times 10^{11} \times 1,35 \times 10^{-6}}{7800 \times 110^2 \times 1} = 1,001$$

A peu près pareil, mais NOUS ne sommes pas pareils! On sait qu'une Röslau de 1,15 tendue à 40kg ne sonnera pas bien! Le taux d'inharmonicité seul ne dit pas tout, car

Notre oreille aime un peu d'inharmonicité dans l'aigu, mais dans le grave elle n'aime pas!

Comment réduire l'inharmonicité dans le grave? 2 solutions si Δ est trop gros:

- par le matériau: plus souple (fer ... laiton ... cuivre rouge ... et même boyau! – pas sur un piano...)
- par la structure: cordes filées

5. Cordes filées

Les formules sont dures, dures à établir
mais faciles, faciles à utiliser (merci les tableurs!) – le plus dur est de bien filer...



...alors autant mettre toutes les chances de son côté en *calculant* le filage avant.

6. Filage des cordes: formules pratiques

- la formule de Barnes n'est pas exacte – elle ne tient pas compte de la déformation (écrasement) du fil d'entourage. Les nouvelles formules ci-dessous en tiennent compte.
- pour chaque type de cordes filées, je donne deux formules:
 - “**formule d'analyse**”: calcule la tension d'une corde filée existante;
 - “**formule d'action**”: calcule les paramètres des fils pour fabriquer une nouvelle corde

Notations:

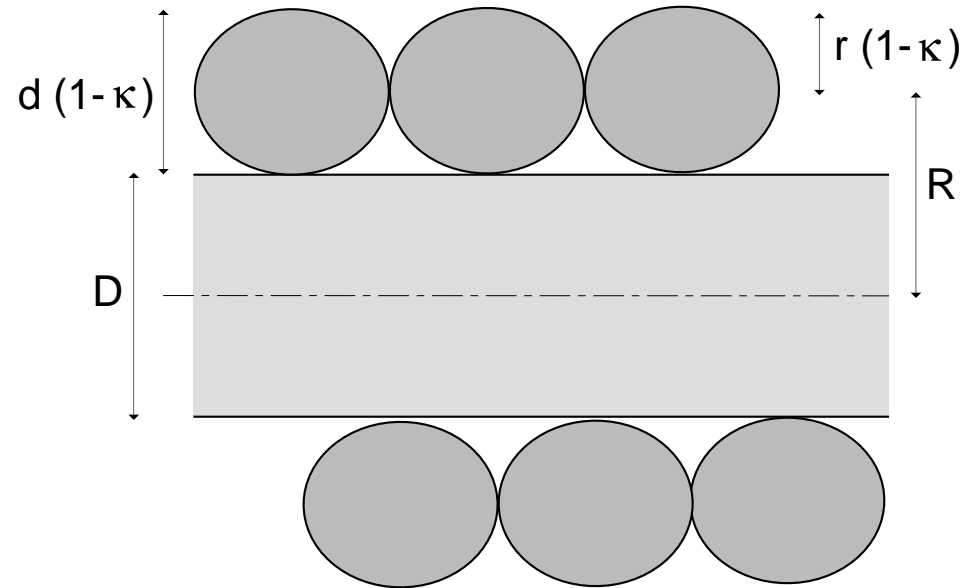
- F fréquence;
- L longueur vibrante;
- T tension;
- D diamètre de l'âme;
- d diamètre du fil de trait;
- Ω diamètre total de la corde filée;
- ρ masse volumique de l'âme;
- σ masse volumique du fil de trait;
- μ masse linéique de la corde filée;
- Δ le diamètre d'une corde pleine qui aurait la même masse linéique que la corde filée considérée.

Toutes les unités sont métriques (ISO): longueurs en mètres, masses en kilogrammes, forces en Newtons

En pratique 1 “kilogramme-force” = 10 Newtons.

$$\Delta = \sqrt{\frac{4\mu}{\pi\rho}}$$

6.1. Corde filée simple, à spires jointives



Formule d'analyse:

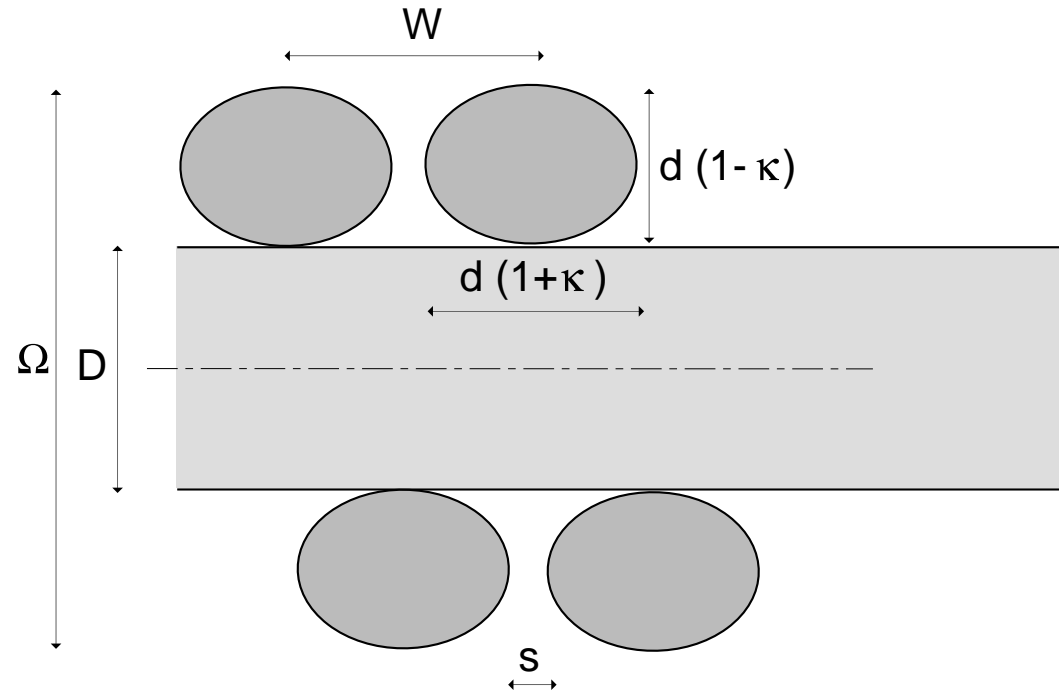
$$T = \pi F^2 L^2 \left(\rho D^2 + \frac{\sigma \pi}{4} (\Omega^2 - D^2) \right)$$

Formule d'action:

- connaissant la tension T désirée, on calcule $\Delta = \frac{1}{FL} \sqrt{\frac{T}{\pi \rho}}$;
- on choisit le diamètre d'âme le plus fin capable de supporter la tension T ;
- le diamètre d du fil de trait sera donné par:

$$d \approx \frac{-D + \frac{0.1\rho}{D\sigma\pi} (\Delta^2 - D^2) + \sqrt{D^2 + \frac{3.8\rho}{\sigma\pi} (\Delta^2 - D^2)}}{2}$$

6.2. Corde filée simple, à spires non jointives (filetage ouvert)



Formule d'analyse:

$$T = \frac{\pi D^2 F^2 L^2 \left[\rho + \frac{\sigma \pi D}{W} \left(630 - 200 \frac{\Omega}{D} + \left(12.5 \frac{\Omega}{D} - 115 \right) \sqrt{30 - 12.5 \frac{\Omega}{D}} \right) \right]}{4}$$

Formule d'action:

- connaissant la tension T désirée, on calcule $\Delta = \frac{1}{FL} \sqrt{\frac{T}{\pi \rho}}$
- on choisit le diamètre d'âme le plus fin possible, capable de supporter la tension T .

Nous avons envisagé 3 méthodes différentes pour réaliser un filetage ouvert (maintenant, la parole aux praticiens...):

- Filage multifils, soit n le nombre de brins parallèles:

$$d = \frac{-[\sigma\pi D^2 + 0.1\rho n(D^2 - \Delta^2)] + D\sqrt{\pi^2\sigma^2 D^2 - 3.8\pi n\rho\sigma(D^2 - \Delta^2)}}{2\pi\sigma D}$$

- Filage avec outil d'espacement d'épaisseur s

On commence par calculer quel serait le diamètre d' si on faisait un filetage jointif, puis on calcule le diamètre d à utiliser:

$$d' \approx \frac{1}{2} \left[-D + \frac{0.1\rho}{D\sigma\pi} (\Delta^2 - D^2) + \sqrt{D^2 + \frac{3.8\rho}{\sigma\pi} (\Delta^2 - D^2)} \right]$$

$$d = \frac{d'}{2} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{4s}{d'}} \right)$$

- Filage avec outil d'espacement d'épaisseur s pour *remplacer* une corde existante.

Si on appelle d' le diamètre de fil de trait utilisé dans l'ancienne corde jointive, il faut utiliser un fil de trait un peu plus fort, de diamètre d donné par:

$$d = \frac{d'}{2} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{4s}{d'}} \right)$$

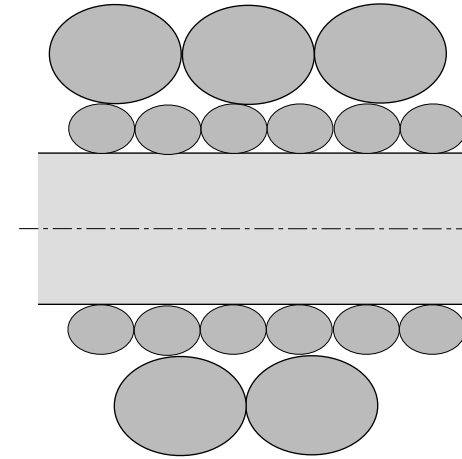
- Filage avec un tour à chariotage automatique (automatic feeder), réglé sur le pas W : calculer

$$d' = \frac{1}{2} \left[-D + \frac{0.1\rho}{D\sigma\pi} (\Delta^2 - D^2) + \sqrt{D^2 + \frac{3.8\rho}{\sigma\pi} (\Delta^2 - D^2)} \right]$$

et on obtient alors le diamètre effectif d du fil de trait par la formule $d = \sqrt{\frac{d'DW}{D+0,1 d'}}$

6.3. Corde filée double

On utilise un premier filage au diamètre d puis un second filage au diamètre $2d$.



Formule d'analyse:

$$T = \pi F^2 L^2 \left(\rho D^2 + \frac{\sigma \pi}{4} (\Omega^2 - D^2) \right)$$

Formule d'action:

- connaissant la tension T désirée, on calcule $\Delta = \frac{1}{FL} \sqrt{\frac{T}{\pi \rho}}$
- on choisit le diamètre d'âme le plus fin capable de supporter la tension T ;
- le diamètre d du premier fil de trait sera donné par:

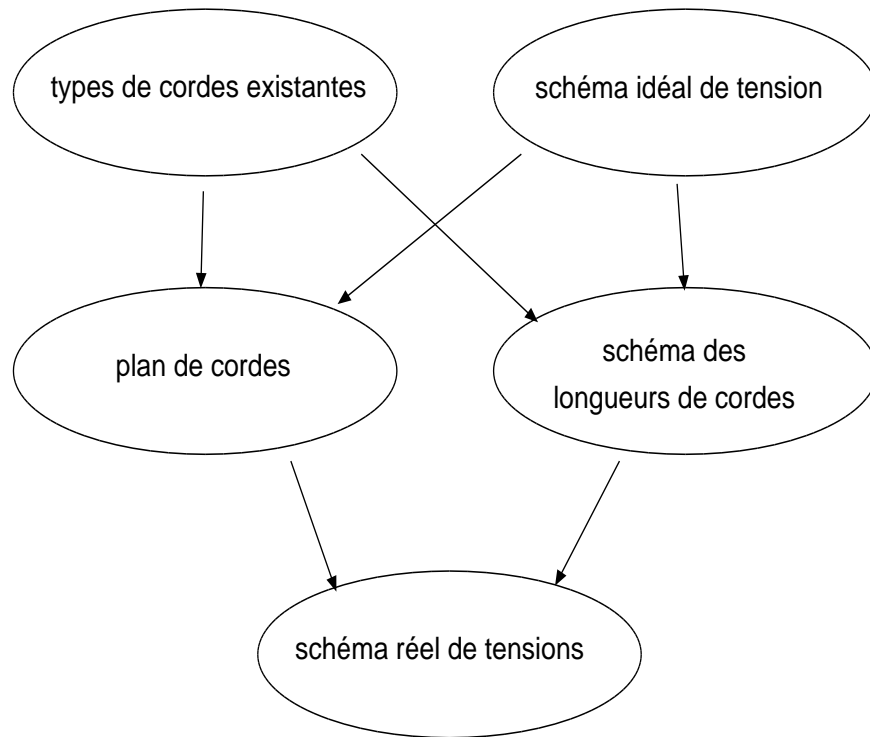
$$d \approx 0.183 \left(-D + \sqrt{D^2 + \frac{4\rho}{\pi\sigma} (\Delta^2 - D^2)} \right)$$

- le second fil de trait aura le diamètre double, soit

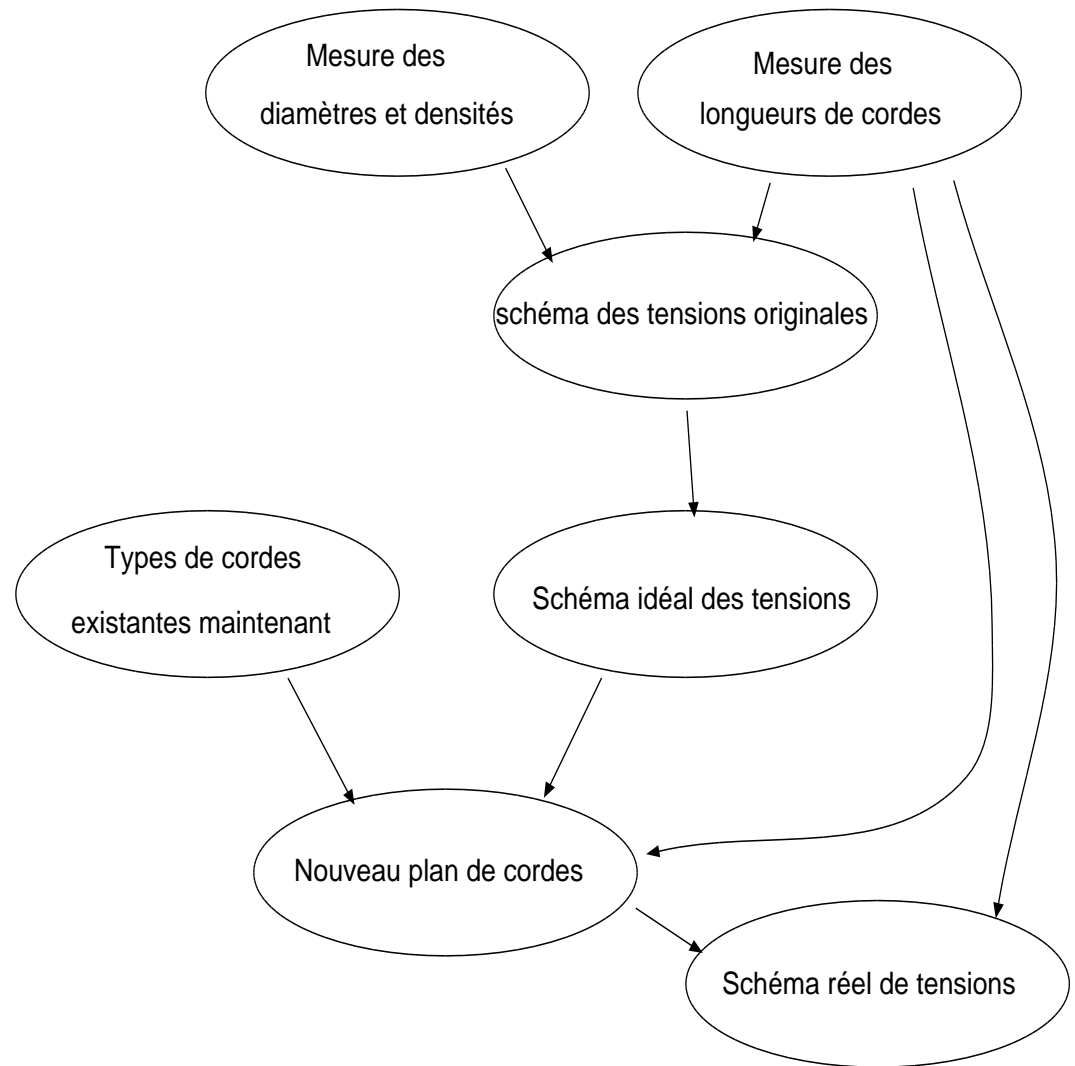
$$2d \approx 0.366 \left(-D + \sqrt{D^2 + \frac{4\rho}{\pi\sigma} (\Delta^2 - D^2)} \right)$$

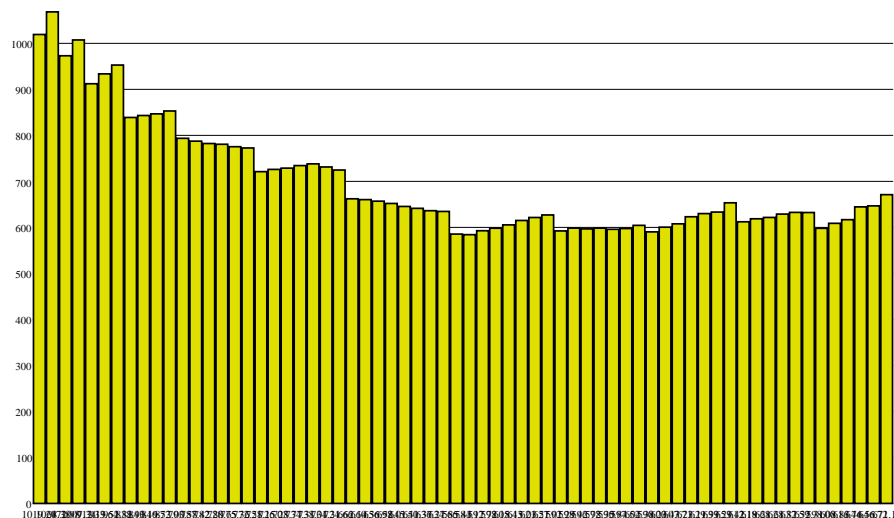
7. Plan de cordage et restauration

Conception d'un piano



Restauration d'un piano





Tensions originales cordes blanches Erard 1914 modèle 2 (cordes croisées 220cm)

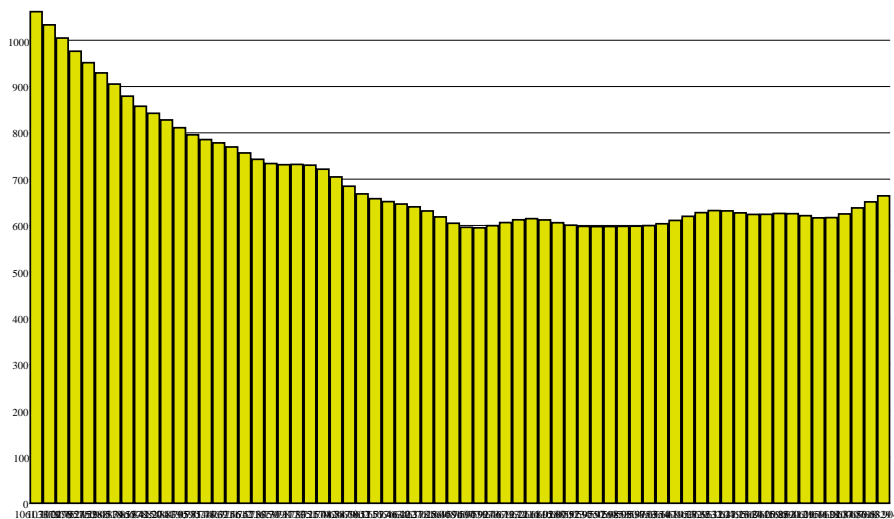


Schéma des tensions idéales du même piano

8. Le logiciel StringIt: calcul des plans de cordes en restauration

En cours de “clickodromisation”... sera interactif et accessible par n’importe quel browser (Firefox, Mozilla, Netscape, Netsurf, InternetExplorer, etc.) sous Linux, MacOS, Windows, RiscOS, Amiga ...

- Saisie des informations générales sur l’instrument
 - Nom du client, mot de passe
 - référence client (facultatif)
 - type d’instrument (piano, clavecin, clavicorde...)
 - marque, numéro de série, type, année approximative (facultatif)
- Saisie des informations techniques sur l’instrument
 - diapason d’origine (la = ?)
 - tableau des touches: cocher la plus grave et la plus aiguë
 - nombre de cordes pour chaque note (si piano): première et dernière triple, prem. et dernière double etc.
 - corde pleine (acier/fer/laiton/cuivre)? Filée simple (cuivre/laiton)? filée double (cuivre/laiton)?
 - longueur vibrante (obligatoire: la première et la dernière de chaque chevalet; fortement conseillé: 2 ou 3 longueurs par octave; très conseillé: la première et la dernière de chaque diamètre; idéal: toutes)
 - diamètre (pour les cordes simples/blanches) et diamètre total (pour les cordes filées)

A partir de ces données, le programme

- diagnostique autant qu’il peut, les possibles erreurs de mesure et donne à l’utilisateur la possibilité de les corriger;
- calcule les tensions existantes.

Deuxième partie du programme

A partir d'ici, l'utilisateur peut s'il le veut entrer dans la *partie payante* du programme. Il peut encore modifier toutes ses données *sauf les longueurs de cordes* qui sont la "*signature*" de l'instrument, et relancer le programme autant de fois qu'il veut sur le même instrument, en changeant ses choix:

- préférences pour tel ou tel fournisseur de cordes (facultatif)
- diapason d'utilisation prévu
- coefficient de sécurité (si l'instrument a des faiblesses de structure)
- l'utilisateur accepte-t-il éventuellement de panacher plusieurs fournisseurs? (lorsque c'est possible sans préjudice musical, l'ordinateur évite de panacher)
- cordes en laiton requises/autorisées/interdites (ceci concerne pianoforte anciens et clavecins)
- cordes filées requises/autorisées/interdites
- cordes doublement filées requises/autorisées/interdites
- en réponse, le programme donne un plan de cordage avec pour chaque corde:
 - diamètre
 - fabricant et type de corde (par exemple, *Paulello type O* ou *Rose type C* ou *Puresound* ou ...)
 - pour les cordes filées simples: diamètre, fabricant et type de corde d'âme, diamètre et matériau de fil de trait
 - pour les cordes filées doubles: diamètre, fabricant et type de corde d'âme, diamètres et matériau du premier et second fil de trait.

Ce service logiciel sera normalement disponible début 2009. Il est déjà possible de l'utiliser en *version non interactive*, pour un prix réduit (me contacter).